

Table des matières

Notations	iv
Introduction	vi
1 Espaces de Lebesgue à exposant variable	1
1.1 Propriétés de base des exposants variables.	1
1.2 Conditions log-Hölderienne continues.	5
1.3 Inégalités fondamentales dans espaces de Lebesgue à exposant variable . . .	6
2 Espaces de Herz classiques et Herz à exposant variable	9
2.1 Généralité sur espaces de Herz classiques	9
2.2 Espaces de Herz à exposant variable	10
2.3 Quelques remarques et inclusions	10
2.4 Décomposition atomique des espaces de Herz à exposant variable	12
3 Continuité des opérateurs intégraux du type Caldéron-Zygmund sur les espaces de Herz à exposant variable	15
3.1 Résultats dans espaces de Herz classiques	15
3.2 Continuité des opérateurs de type C-Z sur l'espaces de Herz à exposant variable	16
3.3 La continuité des opérateurs intégraux fractionnaires sur les espaces de Herz à exposant variable	21
Conclusion	25
Bibliographie	26

Notations

- Pour $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$
- La dérivée partielle $\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial^{\alpha_1} x_1 \dots \partial^{\alpha_n} x_n}$ est notée $\partial^\alpha f$.
- Pour $x, \xi \in \mathbb{R}^n$, alors $x \cdot \xi = \sum_{i=1}^n x_i \xi_i$ est le produit scalaire usuel sur \mathbb{R}^n
- Soient A_1 et A_2 deux espaces, on dit que $A_1 \hookrightarrow A_2$ s'il existe $c > 0$, telle que :

$$\|f\|_{A_2} \leq c \|f\|_{A_1}, \quad (\forall f \in A_1).$$

- $p'(\cdot)$ est l'exposant conjugué de $p(\cdot)$ où $\frac{1}{p(\cdot)} + \frac{1}{p'(\cdot)} = 1$.
- Soit $a \in \mathbb{R}$, $a^+ = \max(a, 0)$.
- Si $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{C}$, $\text{supp } f$ est le support de f telle que

$$\text{supp } f = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n, f(x) \neq 0\}}.$$

- E' est l'espace dual de E .
- Soit $0 < p < \infty$, L^p l'espace des fonctions mesurables f telle que

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

- Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $0 < p \leq \infty$, on définit $L^p_{loc}(\Omega)$ par:

$$L^p_{loc}(\Omega) := \{f \text{ mesurable} : f \in L^p(K) \text{ pour tout } K \subset \Omega, K \text{ compact}\}.$$

- ℓ^q : est l'espace des suites $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ telle que

$$\|\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}}\|_{\ell^q} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

- Soient $0 < p \leq \infty$, $0 < q < \infty$, alors $\ell^q(L^p)$ est l'espace des suites $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ telle que

$$\|\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}\|_{\ell^q(L^p)} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \|f_k(x)\|_p^q \right)^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

- $[x]$ est la partie entière de x .
- $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$: l'espace des fonctions $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ à décroissances rapides .
- $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$: l'espace des distributions tempérées.
- Soit $E \neq \emptyset$, on définit

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in E \\ 0 & \text{si } x \notin E \end{cases}.$$

- \lesssim : Inférieure ou équivalente ($f \lesssim g \Leftrightarrow \exists c$ positif tel que $f \leq cg$)

Introduction

Les espaces de Herz à exposants variables sont des espaces modulaires qui remontent à les années soixantes avec les auteurs Beurling et Herz. Ces espaces sont un cas particulier des espaces de Musielak-Orlicz et une généralisation des espaces de Lebesgue classiques L^p . Ces espaces sont différent des espaces de Lebesgue $L^{p(\cdot)}$ par le fait que l'exposant " p " n'est pas une constante mais une fonction mesurable définie sur un ensemble mesurable Ω à valeurs dans \mathbb{R}^+ . Ces espaces qui remontent à W. Orlicz en 1931, et le développement moderne a commencé avec O. Kováčik & J. Rákosník, en 1991 (On space $L^{p(x)}$ and $W^{1,p(x)}$, Czechoslovak, J. 41(116) (1991), 592-618).

La continuité des opérateurs intégraux fractionnaires (resp. les opérateurs de Caldéron-Zygmund) sur les espaces fonctionnels est l'un des problèmes importants en analyse fonctionnelle. Pour étudier la continuité de ces opérateurs dans l'espace de Herz à exposants variables on utilise par exemple la décomposition atomique de ces espaces.

Notre travail est structuré en trois chapitres organisé comme suit :

Dans le premier chapitre, nous rappellerons quelques définitions, propriétés et notations essentielles des espaces de Lebesgue à exposants variables.

Dans le deuxième chapitre on présente quelques généralités sur les espaces de Herz classiques et à exposants variables (Définitions, notations essentielles, propriété et quelques résultats et remarque qu'on utilisera par la suite).

Finalemant dans le troisième chapitre, on étudié la continuité des opérateurs intégraux du type Caldéron-Zygmund sur espaces de Herz à exposants variables.

Chapitre 1

Espaces de Lebesgue à exposant variable

Les espaces de Lebesgue à exposants variables c'est une généralisation de les espaces de Lebesgue classiques, ces espaces jouent un rôle important dans l'analyse fonctionnelle, en théorie des équations aux dérivées partielles et en la mécanique des fluides. Le but de ce chapitre est de présenter quelque propriétés et notations de base des exposants variables et de les espaces de Lebesgue à exposants variables .

1.1 Propriétés de base des exposants variables.

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, on définit

$$\mathcal{P}_0(\Omega) = \{p \text{ muserable} : p(\cdot) : \Omega \rightarrow [c, \infty] \text{ pour } c > 0\}$$

Les éléments de $\mathcal{P}_0(\Omega)$ s'appellent exposants variables ou bien des exposants, pour distinguer les exposants variables et les exposants constants on note l'ensemble de exposants variables par $P(\cdot)$.

On considéré maintenant un exemple sur l'exposant variable, voir [2, définition 2.1].

Exemple 1.1.1 Soit $\Omega = \mathbb{R}$,on a

1- $p(x) = p$, pour p constant et si $1 \leq p < \infty$

2- $p(x) = 2 + \sin x$.

Définition 1.1.1 Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et $p \in \mathcal{P}_0(\Omega)$. L'espace de Lebesgue à exposant variable noté $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions mesurables f telle que $\rho_{p(\cdot)}\left(\frac{f}{\lambda}\right) < \infty$ pour tout $\lambda > 0$.

$$L^{p(\cdot)}(\Omega) = \left\{ f \text{ mesurable} : \exists \lambda > 0 : \rho_{p(\cdot)}\left(\frac{f}{\lambda}\right) = \int_{\Omega} \left| \frac{f(x)}{\lambda} \right|^{p(x)} \leq 1 \right\}.$$

Théorème 1.1.1 $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ est un espace vectoriel normé sur \mathbb{R} , muni de la norme

$$\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} := \inf \left\{ \lambda > 0 : \rho_{p(\cdot)}\left(\frac{f}{\lambda}\right) \leq 1 \right\}.$$

Si l'ensemble du côté-droit est vide, on définit $\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} = \infty$. Si $\Omega = \mathbb{R}^n$ on écrit $\|f\|_{p(\cdot)}$ à la place de $\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}$.

Preuve. On montre que $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ est un espace vectoriel.

Puisque $\rho_{p(\cdot)}(0) = 0$, on a $0 \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$.

Soit $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ et $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Il existe $\lambda > 0$ telle que

$$\rho_{p(\cdot)}(\lambda f) < \infty.$$

On pose $\lambda_0 = \frac{\lambda}{|\alpha|}$.

$$\begin{aligned} \rho_{p(\cdot)}(\lambda_0 \alpha f) &= \rho_{p(\cdot)}(\lambda_0 |\alpha| f) \\ &= \rho_{p(\cdot)}(\lambda f) < \infty. \end{aligned}$$

Ce qui montre que $\alpha f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$. Il nous suffit donc de montrer que si $f, g \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$, alors $f + g \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$. Par la convexité de $\rho_{p(\cdot)}$,

$$\begin{aligned} \rho_{p(\cdot)}(\lambda(f + g)) &= \rho_{p(\cdot)}\left(\left(\frac{1}{2}2\lambda f + \left(1 - \frac{1}{2}\right)2\lambda g\right)\right) \\ &\leq \frac{1}{2}\rho_{p(\cdot)}(2\lambda f) + \frac{1}{2}\rho_{p(\cdot)}(2\lambda g) \rightarrow 0 \text{ lorsque } \lambda \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Maintenant on montre que $\|\cdot\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}$ est une norme. Soit $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$. Il existe $\mu > 0$ telle que $\rho_{p(\cdot)}(\mu f) < 1$. Ce qui montre que $\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} < \infty$.

On a aussi $\|0\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} = 0$.

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ on a:

$$\begin{aligned}
 \|\alpha f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} &= \inf \left\{ \lambda > 0 : \rho_{p(\cdot)} \left(\frac{\alpha f}{\lambda} \right) \leq 1 \right\} \\
 &= \inf \left\{ \lambda > 0 : \rho_{p(\cdot)} \left(\frac{|\alpha| f}{\lambda} \right) \leq 1 \right\} \\
 &= \inf \left\{ \tau |\alpha| > 0 : \rho_{p(\cdot)} \left(\frac{f}{\tau} \right) \leq 1 \right\} \\
 &= |\alpha| \inf \left\{ \tau > 0 : \rho_{p(\cdot)} \left(\frac{f}{\tau} \right) \leq 1 \right\} \\
 &= |\alpha| \|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}.
 \end{aligned}$$

On montre maintenant l'inégalité triangulaire. Soient $f, g \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ et $\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} < \gamma$ et $\|g\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} < \delta$. Alors

$$\left\| \frac{f}{\gamma} \right\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \leq 1 \quad \text{et} \quad \left\| \frac{g}{\delta} \right\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \leq 1$$

Donc par la convexité de $\rho_{p(\cdot)}$ on a:

$$\begin{aligned}
 \rho_{p(\cdot)} \left(\frac{f+g}{\gamma+\delta} \right) &= \rho_{p(\cdot)} \left(\frac{\gamma}{\gamma+\delta} \frac{f}{\gamma} + \frac{\delta}{\gamma+\delta} \frac{g}{\delta} \right) \\
 &\leq \frac{\gamma}{\gamma+\delta} \rho_{p(\cdot)} \left(\frac{f}{\gamma} \right) + \frac{\delta}{\gamma+\delta} \rho_{p(\cdot)} \left(\frac{g}{\delta} \right) \\
 &\leq \frac{\gamma}{\gamma+\delta} + \frac{\delta}{\gamma+\delta} = 1.
 \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\|f+g\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \leq \gamma + \delta.$$

Ce qui implique

$$\|f+g\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \leq \|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} + \|g\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}.$$

Si $\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} = 0$, alors $\rho_{p(\cdot)}(\alpha f) \leq 1$ pour tout $\alpha > 0$. Par la convexité de $\rho_{p(\cdot)}$,

$$\begin{aligned}
 \rho_{p(\cdot)}(\lambda f) &= \rho_{p(\cdot)} \left(\tau \frac{\lambda f}{\tau} \right) \\
 &= \rho_{p(\cdot)} \left(\tau \frac{\lambda f}{\tau} + (1-\tau)0 \right) \\
 &\leq \tau \rho_{p(\cdot)} \left(\frac{\lambda f}{\tau} \right) \\
 &\leq 1,
 \end{aligned}$$

pour tout $\lambda > 0$ et pour tout $\tau \in (0; 1]$. Donc $x = 0$. ■

Notation 1.1.1 On note par

$$\mathcal{P}(\Omega) = \{p \text{ mesurable: } p(\cdot) : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow [1, \infty]\}$$

Soient $p \in \mathcal{P}_0(\Omega)$ et $E \subset \Omega$

$$p^-(E) = \operatorname{ess}_{x \in E} \inf p(x), \quad p^+(E) = \operatorname{ess}_{x \in E} \sup p(x)$$

Si $E = \Omega = \mathbb{R}^n$ alors :

$$p^-(E) = p(\mathbb{R}^n), \quad p^+(E) = p(\mathbb{R}^n)$$

Théorème 1.1.2 (Théorème de Riesz-Fischer) Soit $p \in \mathcal{P}(\Omega)$, alors $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ est un espace de banach

Dans l'espace de Lebesgue classique la relation entre la norme et sa modulaire est claire, mais ce ne est pas le cas lorsque l'on considère exposant variable.

Lemme 1.1.1 ([4]) Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Si $p \in \mathcal{P}(\Omega)$ alors

$$\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \leq 1 \Leftrightarrow \rho_{p(\cdot)}(f) \leq 1$$

De plus

1- Si $\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \leq 1$ alors $\rho_{p(\cdot)}(f) \leq \|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}$.

2- Si $1 < \|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}$ alors $\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \leq \rho_{p(\cdot)}(f)$.

La proposition suivante est la plus utilise dans l'espace de Lebesgue à exposant variable, voir [2, Proposition 2.18] and [4, Lemme 3.2.6].

Proposition 1.1.1 Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et $p \in \mathcal{P}(\Omega)$ et $s > 0$ telle que $sp^- > 1$. Alors

$$\||f|^s\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} = \|f\|_{L^{sp(\cdot)}(\Omega)}^s.$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^{sp(\cdot)}(\Omega)} &= \inf \left\{ \lambda > 0 : \rho_{sp(\cdot)}\left(\frac{f}{\lambda}\right) \leq 1 \right\} \\ &= \inf \left\{ \lambda > 0 : \rho_{p(\cdot)}\left(\frac{f^s}{\lambda^s}\right) \leq 1 \right\} \\ &= \inf \left\{ t^{\frac{1}{s}} > 0 : \rho_{p(\cdot)}\left(\frac{f^s}{t}\right) \leq 1 \right\} \\ &= \||f|^s\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}^{\frac{1}{s}}. \end{aligned}$$

Ce qui termine la preuve. ■

Définition 1.1.2 Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et $p \in \mathcal{P}_0(\Omega)$, on définit $L_{loc}^{p(\cdot)}(\Omega)$ par:

$$L_{loc}^{p(\cdot)}(\Omega) := \{f \text{ measurable} : f \in L^{p(\cdot)}(K) \text{ pour tout } K \subset \Omega, K \text{ compact}\}.$$

1.2 Conditions log-Hölderienne continues.

Dans cette section on présente une condition plus importante sur les exposants pour étudier les propriétés des espaces de Lebesgue à exposant variable.

Définition 1.2.1 On dit que la fonction $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est localement log-Hölderienne continue sur Ω , et on écrit $g \in C_{loc}^{\log}(\Omega)$, s'il existe $c_{\log}(g) > 0$ telle que:

$$|g(x) - g(y)| \leq \frac{c_{\log}}{\ln\left(e + \frac{1}{|x-y|}\right)}$$

Pour tout $x, y \in \Omega$. Si $0 \in \Omega$ et

$$|g(x) - g(0)| \leq \frac{c_{\log}}{\ln\left(e + \frac{1}{|x|}\right)}$$

Pour tout $x \in \Omega$, on dit que g est log-Hölderienne continue à l'origine. Si pour certain $g_{\infty} \in \mathbb{R}$ et $c_{\log} > 0$,

$$|g(x) - g_{\infty}| \leq \frac{c_{\log}}{\ln(e + x)}$$

Pour tout $x \in \Omega$, on dit que g est log-Hölderienne continue à l'infini, et on note par $g \in C^{\log}(\Omega)$.

Un exemple d'une fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui est localement Hölderienne continue sur \mathbb{R} , voir E. Nakai et Y. Sawano [8, Exemple 1.3].

Exemple 1.2.1 On considère

$$g(x) = \max\left(1 - \exp(3 - |x|), \min\left(\frac{6}{5}, \max\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2 - x^2}\right)\right)\right), x \in \mathbb{R}$$

la fonction g est hölderienne continue sur \mathbb{R}

Remarque 1.2.1 *Toute les fonctions g sont Hölderienne continue à l'infini toujours appartient à L^∞ .*

Notation 1.2.1 *La notation $\mathcal{P}^{\log}(\Omega)$ est utilisée pour tout exposant $p \in \mathcal{P}(\Omega)$ qui sont localement hölderienne continue à l'infini. La classe $\mathcal{P}_0^{\log}(\mathbb{R}^n)$ est définie de manière analogique. Si Ω borné alors on définit p_∞ par:*

$$p_\infty = \lim_{|x| \rightarrow \infty} p(x).$$

1.3 Inégalités fondamentales dans espaces de Lebesgue à exposant variable

Le théorème suivant est une généralisation de l'inégalité de Hölder classique sur l'espace de Lebesgue à exposant variable. Rappelons que l'inégalité de Hölder classique est donne pour tout $p, 1 \leq p < \infty$, soient $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^{p'}(\Omega)$

$$\int_{\Omega} |f(x) g(x)| dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^{p'}(\Omega)}.$$

Cette inégalité est vraie pour l'espace à exposant variable avec une constante sur la coté droite, voir par exemple [3, Théorème 2.33].

Théorème 1.3.1 *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et $p \in \mathcal{P}(\Omega)$. Alors il existe une constante k telle que pour tout $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ et $g \in L^{p'(\cdot)}(\Omega)$, on a $fg \in L^1(\Omega)$ et*

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq k \|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \|g\|_{L^{p'(\cdot)}(\Omega)}$$

où

$$k = \left(\frac{1}{p^-} + 1 - \frac{1}{p^+} \right).$$

L'inégalité de Hölder dans l'espace de Lebesgue classique valable dans l'espace de Lebesgue à exposant variable, pour la preuve du corollaire suivant, voir [2, corollaire 2.28].

Corollaire 1.3.1 *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et $p, q \in \mathcal{P}(\Omega)$, on définit $r \in \mathcal{P}(\Omega)$ par:*

$$\frac{1}{r(\cdot)} = \frac{1}{p(\cdot)} + \frac{1}{q(\cdot)}.$$

Alors il existe une constante k telle que pour tout $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ et $g \in L^{q(\cdot)}(\Omega)$, on a $fg \in L^{r(\cdot)}(\Omega)$ et

$$\|fg\|_{L^{r(\cdot)}(\Omega)} \leq k \|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \|g\|_{L^{q(\cdot)}(\Omega)}$$

Preuve. Soient $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ et $g \in L^{q(\cdot)}(\Omega)$ telle que $\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \leq 1$ et $\|g\|_{L^{q(\cdot)}(\Omega)} \leq 1$. Par la convexité de la fonction modulaire $\rho_{r(\cdot)}(f)$ et le lemme 1.1.1

$$\begin{aligned} \rho_{r(\cdot)}\left(\frac{1}{2}fg\right) &\leq \frac{1}{2}\rho_{p(\cdot)}(f) + \frac{1}{2}\rho_{q(\cdot)}(g) \\ &\leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1. \end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\|fg\|_{L^{r(\cdot)}(\Omega)} \leq 2.$$

Ce qui termine la preuve. ■

Maintenant, nous présentons les propriétés de base de l'opérateur de convolution dans l'espace de Lebesgue à exposant variable.

Définition 1.3.1 Soient f et g deux fonctions localement intégrable sur \mathbb{R}^n , la fonction convolution $f * g$ est définie par :

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) dy$$

pour tout intégrale finie.

Nous discutons d'abord l'échec de l'inégalité de Minkowski sur l'espace de Lebesgue à exposant variable, il a été montré dans [2, Théorème 5.19] et dans [4, corollaire 3.6.4] que l'inégalité de Minkowski $\|f * g\|_{p(\cdot)} \leq \|f\|_{p(\cdot)} \|g\|_1$ n'est jamais vraie pour l'exposant non constant.

Théorème 1.3.2 Soit $p \in \mathcal{P}(\Omega)$ l'inégalité:

$$\|f * g\|_{p(\cdot)} \leq \|f\|_{p(\cdot)} \|g\|_1$$

est vraie pour toute $f \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si p est constant.

Définition 1.3.2 Une fonction f définie sur \mathbb{R}^n est dite radiale si sa valeur ne dépend que la distance à l'origine. Dans ces cas il existe une fonction F de variable unique de sorte que

$$f(x) = F(|x|)$$

La proposition suivante est une version très faible de l'inégalité de Minkowski, voir [3, proposition 4.7].

Proposition 1.3.1 *Soit $p \in \mathcal{P}^{\log}(\mathbb{R}^n)$. Pour tout $f \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ et pour chaque fonction radiale décroissante non négative $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$:*

$$\|f * g\|_{p(\cdot)} \leq \|f\|_{p(\cdot)} \|g\|_1 \quad (1.2)$$

L'inégalité de Young n'est pas valable pour l'exposant variable en général, cet exemple est de [3, Exemple 5.21].

Exemple 1.3.1 *Soit $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ telle que :*

$$p(x) = \begin{cases} 2, & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus [-2, 2] \\ 4, & \text{si } x \in [-1, 1] \end{cases}$$

on définit

$$f(x) = |x - 3|^{-\frac{1}{3}} \chi_{[2,4]}, \quad g(x) = |x|^{-\frac{2}{3}} \chi_{[-1,1]}.$$

Puisque $f^2 \in L^1(\mathbb{R})$, donc $f \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R})$, et comme $p'(\cdot) = \frac{4}{3}$ dans $[-1, 1]$ et $g^{\frac{4}{3}} \in L^1(\mathbb{R})$, alors $g \in L^{p'(\cdot)}(\mathbb{R})$. Cependant, nous notons que:

$$\|f * g\|_{\infty} \leq \|f\|_{p(\cdot)} \|g\|_{p'(\cdot)}$$

*Comme $f * g$ est illimité en 3. Soit $E_x = [2,4] \cap [x - 1, x + 1]$, pour montrer ça on utilise le lemme de Fatou dans l'espace de Lebesgue classique*

$$\begin{aligned} \liminf_{x \rightarrow 3} f * g(x) &= \liminf_{x \rightarrow 3} \int_{\mathbb{R}} |x - y|^{-\frac{2}{3}} |y - 3|^{-\frac{1}{3}} \chi_{E_x}(y) dy \\ &\geq \int_{\mathbb{R}} \lim_{x \rightarrow 3} |x - y|^{-\frac{2}{3}} |y - 3|^{-\frac{1}{3}} \chi_{E_x}(y) dy \\ &\geq \int_2^4 |y - 3|^{-1} dy = \infty. \end{aligned}$$

Chapitre 2

Espaces de Herz classiques et Herz à exposant variable

L'objet de ce chapitre est de rappeler quelques définitions et notations essentielles des espaces de Herz classiques et Herz à exposant variable avec quelques propriétés principales.

2.1 Généralité sur espaces de Herz classiques

Nous commençons par une définition de l'espace de Herz homogène et non homogène.

Pour simplifier l'écriture, on a la notation suivante

$$B_k := B(0, 2^k), \quad R_k := B_k \setminus B_{k-1} \quad \text{et} \quad \chi_k = \chi_{R_k}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Définition 2.1.1 Soit $\alpha \in \mathbb{R}, 0 < p, q \leq \infty$

(i) On définit l'espace de Herz homogène par:

$$\dot{K}_p^{\alpha, q}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in L_{loc}^p(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) : \|f\|_{\dot{K}_p^{\alpha, q}(\mathbb{R}^n)} < \infty \right\}$$

avec

$$\|f\|_{\dot{K}_p^{\alpha, q}(\mathbb{R}^n)} = \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2^{k\alpha q} \|f\chi_k\|_p^q \right)^{\frac{1}{q}} < \infty$$

(ii) On définit l'espace de Herz non homogène par:

$$K_p^{\alpha, q}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in L_{loc}^p(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{K_p^{\alpha, q}(\mathbb{R}^n)} < \infty \right\}.$$

avec

$$\|f\|_{K_p^{\alpha,q}(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|f\|_{\dot{K}_p^{\alpha,q}(\mathbb{R}^n)}$$

avec les modifications lorsque $p = \infty$ et /ou $q = \infty$.

2.2 Espaces de Herz à exposant variable

Dans cette partie, nous concentrons sur les espaces de Herz avec un seul exposant variable $p(\cdot)$.

Définition 2.2.1 Soient $p \in \mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$, $q \in]0, \infty[$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

1- L'espace de Herz homogène à exposant variable $\dot{K}_{p(\cdot)}^{\alpha,q}(\mathbb{R}^n)$ est définie pour tout $f \in L_{loc}^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ telle que

$$\|f\|_{\dot{K}_{p(\cdot)}^{\alpha,q}} = \left\| (2^{k\alpha} f \chi)_{k \in \mathbb{Z}} \right\|_{\ell^q(L^{p(\cdot)})} < \infty$$

2- L'espace de Herz non homogène à exposant variable $K_{p(\cdot)}^{\alpha,q}(\mathbb{R}^n)$ est définie pour tout $f \in L_{loc}^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ telle que:

$$\|f\|_{K_{p(\cdot)}^{\alpha,q}(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} + \|f\|_{\dot{K}_{p(\cdot)}^{\alpha,q}(\mathbb{R}^n)}$$

Si p est constante, alors $\dot{K}_{p(\cdot)}^{\alpha,q}(\mathbb{R}^n) = \dot{K}_p^{\alpha,q}(\mathbb{R}^n)$ coïncide sur l'espace de Herz homogène classique et si $\alpha = 0, p(\cdot) = p = q$ alors $\dot{K}_p^{0,p}(\mathbb{R}^n)$ coïncide sur l'espace $L^p(\mathbb{R}^n)$.

2.3 Quelques remarques et inclusions

Dans cette partie, nous présentons quelques remarques et inclusions dans l'espace de Herz à exposant variable.

Proposition 2.3.1 ([1]) Soient $p \in \mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $q, \theta \in]0, \infty]$. Si $q \geq \theta$, alors

$$\dot{K}_{p(\cdot)}^{\alpha,\theta}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \dot{K}_{p(\cdot)}^{\alpha,q}(\mathbb{R}^n).$$

Preuve. L'injection précédente est une conséquence simple de l'injection

$$\ell^\theta(L^{p(\cdot)}) \hookrightarrow \ell^p(L^{p(\cdot)}).$$

■

Remarque 2.3.1 Les espaces $\dot{K}_{p(\cdot)}^{\alpha,q}$ sont des espaces quasi-Banach et si $\min(p^-, q) \geq 1$, alors $\dot{K}_{p(\cdot)}^{\alpha,q}(\mathbb{R}^n)$ sont des espaces de Banach.

La relation entre Herz homogène à exposant variable et non homogène est donnée par :

$$K_{p(\cdot)}^{\alpha,q}(\mathbb{R}^n) = \dot{K}_{p(\cdot)}^{\alpha,q}(\mathbb{R}^n) \cap L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n), \text{ pour tout } \alpha \in \mathbb{R} \text{ et } 0 < q \leq \infty \text{ et } p \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n).$$

Le lemme suivant joue un rôle important dans les espaces à exposant variable.

Lemme 2.3.1 ([1]) Soit $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ un exposant log-Höldérienne continu en l'infini, et $R = B(0, r) \setminus B(0, \frac{r}{2})$. Si $|R| > 2^{-n}$, alors

$$\|\chi_R\|_{p(\cdot)} \approx |R|^{\frac{1}{p(x)}} \approx |R|^{\frac{1}{p_\infty}}$$

avec une constante indépendante de r et $x \in R$.

l'équivalence à gauche est vraie pour tout $|R| > 0$ si en ajoutant la condition p est log-Höldérienne continu en l'infini et en l'origine.

La proposition suivante donne quelques relations dans les espaces de Herz.

Proposition 2.3.2 Soient $\alpha \in \mathbb{R}, p_0, p_1 \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ et $q \in (0, \infty]$. Si $p_0(\cdot) \leq p_1(\cdot)$ et $\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1}$ est log-Hölderienne continue à l'infini et à l'origine, alors:

$$\dot{K}_{p_1(\cdot)}^{\alpha + \frac{n}{p_0(\cdot)} - \frac{n}{p_1(\cdot)}, q} \hookrightarrow \dot{K}_{p_0(\cdot)}^{\alpha, q}.$$

Preuve. Soit $f \in \dot{K}_{p_1(\cdot)}^{\alpha + \frac{n}{p_0(\cdot)} - \frac{n}{p_1(\cdot)}, q}$

$$\|f\|_{\dot{K}_{p_0(\cdot)}^{\alpha, q}} = \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2^{k\alpha q} \|f\chi_k\|_{p_0(\cdot)}^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

et par inégalité de Hölder dans $L^{p_0(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$, on a l'estimation suivante

$$\begin{aligned} \|f\|_{\dot{K}_{p_0(\cdot)}^{\alpha, q}} &= \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2^{k\alpha q} \|f\chi_k\|_{p_0(\cdot)}^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2^{k\alpha q} \|f\chi_k\|_{p_1(\cdot)}^q \|\chi_k\|_{p_0(\cdot)}^q \right)^{\frac{1}{q}} \text{ avec } \frac{1}{p_0(\cdot)} = \frac{1}{p_1(\cdot)} + \frac{1}{t(\cdot)} \\ &\leq c \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \|2^{k(\alpha + \frac{n}{p_0(\cdot)} - \frac{n}{p_1(\cdot)})} f\chi_k\|_{p_1(\cdot)}^q \right)^{\frac{1}{q}} = \|f\|_{\dot{K}_{p_1(\cdot)}^{\alpha + \frac{n}{p_0(\cdot)} - \frac{n}{p_1(\cdot)}, q}}. \end{aligned}$$

■

Lemme 2.3.2 (Inégalité de Hardy) Soient $0 < \alpha < 1$ et $0 < q \leq \infty$. Soit $\{\varepsilon_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ une suite de nombres réel positif telle que:

$$\|\{\varepsilon_k\}_{k \in \mathbb{Z}}\|_{\ell^q} = I < \infty.$$

Alors $\left\{ \delta_k : \delta_k = \sum_{j \leq k} \alpha^{k-j} \varepsilon_j \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$ et $\left\{ \eta_k : \eta_k = \sum_{j \geq k} \alpha^{j-k} \varepsilon_j \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$, appartient ℓ^q et

$$\|\{\delta_k\}_{k \in \mathbb{Z}}\|_{\ell^q} + \|\{\eta_k\}_{k \in \mathbb{Z}}\|_{\ell^q} \leq cI$$

avec $c > 0$ dépendant de α et q .

Lemme 2.3.3 Soient $\alpha_i \in \mathbb{R}, p_i \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ et $q_i \in (0, \infty]$ avec $i = 1, 2$, telle que $\frac{1}{p(\cdot)} = \frac{1}{p_1(\cdot)} + \frac{1}{p_2(\cdot)}, \frac{1}{q(\cdot)} = \frac{1}{q_1(\cdot)} + \frac{1}{q_2(\cdot)}$. alors il existe une constante C telle que pour tout $f \in \dot{K}_{p_2(\cdot)}^{\alpha_2, q_2}(\mathbb{R}^n)$ et $g \in \dot{K}_{p_1(\cdot)}^{\alpha_1, q_1}(\mathbb{R}^n)$ on a:

$$\|fg\|_{\dot{K}_{p(\cdot)}^{\alpha_2, q_2}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|f\|_{\dot{K}_{p_2(\cdot)}^{\alpha_2, q_2}(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{\dot{K}_{p_1(\cdot)}^{\alpha_1, q_1}(\mathbb{R}^n)}$$

Si l'exposants est constante la résultat précédent est l'inégalité de Hölder classique.

Preuve. La preuve de cette inégalité est une conséquence de l'inégalité de Hölder en $\ell^q(\mathbb{R}^n)$, et $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$. ■

2.4 Décomposition atomique des espaces de Herz à exposant variable

La décomposition atomique joue un rôle fondamental dans l'analyse harmonique, c'est un outil puissant pour traiter les théorèmes de dualité, les théorèmes d'interpolation et certaines inégalités fondamentales dans l'analyse harmonique.

La décomposition atomique est l'une des méthodes les plus importantes pour étudier la bornitude de certains opérateurs sur les espaces de Herz.

Tout d'abord, nous présentons la notation de base de la décomposition atomique.

Définition 2.4.1 Soient $0 < \alpha < \infty, p \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$. Une fonction a est dite $(\alpha, p(\cdot))$ -atome central, si

(i) $\text{supp } a \subset \overline{B}(0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq r\}, r > 0$.

(ii) $\|a\|_{p(\cdot)} \leq |\overline{B}(0, r)|^{-\alpha/n}$,

(iii) $\int_{\mathbb{R}^n} x^\beta a(x) dx = 0, \quad |\beta| \leq s$.

Maintenant, nous établissons la caractérisation des espaces $\dot{K}_{p(\cdot)}^{\alpha, q}(\mathbb{R}^n)$ en termes de décompositions atomiques centrales, ce qui permet d'étudier la borniture de quelques opérateurs sur ces espaces.

Théorème 2.4.1 ([6]) *Soient $0 < \alpha < \infty$, $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, et $q \in]0, +\infty[$. Si $p^+ < \infty$. Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes:*

(i)- $f \in \dot{K}_{p(\cdot)}^{\alpha, q}(\mathbb{R}^n)$

(ii)- f peut représenter par

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \lambda_k a_k(x), \quad (2.4.1)$$

où les séries sont convergentes au sens de distributions, $\lambda_k \geq 0$, chaque a_k est un $(\alpha, p(\cdot))$ -atome central de support contenu dans B_k et

$$\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\lambda_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \|f\|_{\dot{K}_{p(\cdot)}^{\alpha, q}(\mathbb{R}^n)}.$$

De plus, les normes $\|f\|_{\dot{K}_{p(\cdot)}^{\alpha, q}(\mathbb{R}^n)}$ et $\inf(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\lambda_k|^q)^{\frac{1}{q}}$ sont équivalentes où le minimum pris dans toutes les décompositions de f comme dans (2.4.1).

Preuve. Nous prouvons premièrement (i) implique (ii). Pour toute $f \in \dot{K}_{p(\cdot)}^{\alpha, q}(\mathbb{R}^n)$, on écrit

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(x) \chi_k(x) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2^{k\alpha} \|f \chi_k\|_{p(\cdot)} \frac{f(x) \chi_k(x)}{2^{k\alpha} \|f \chi_k\|_{p(\cdot)}} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \lambda_k a_k(x), \end{aligned}$$

où $\lambda_k = \|2^{k\alpha} f \chi_k\|_{p(\cdot)}$ et $a_k(x) = \frac{f(x) \chi_k(x)}{2^{k\alpha} \|f \chi_k\|_{p(\cdot)}}$. Il est clair que $\text{supp } a_k \subset B_k$ et

$$\|a_k\|_{p(\cdot)} = 2^{-k\alpha}$$

Ainsi, chacun a_k est un $(\alpha, p(\cdot))$ -atome central avec le support inclu dans B_k et

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\lambda_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} &= \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \|2^{k\alpha} f \chi_k\|_{p(\cdot)}^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \|f\|_{\dot{K}_{p(\cdot)}^{\alpha, q}(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

Nous montrons que (ii) implique (i). Soit $f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \lambda_k a_k(x)$ une décomposition de f qui satisfait l'hypothèse (ii) du théorème 2.4.1. Pour chaque $j \in \mathbb{Z}$, par l'inégalité de Minkowski

$$\|f \chi_j\|_{p(\cdot)} \leq \sum_{k=j}^{\infty} |\lambda_k| \|a_k\|_{p(\cdot)}. \quad (2.4.2)$$

En utilisant la formule (2.4.2), on trouve

$$\begin{aligned} \|f\|_{\dot{K}_{p(\cdot)}^{\alpha, q}(\mathbb{R}^n)} &= \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(2^{k\alpha} \|f \chi_k\|_{p(\cdot)} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq c \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2^{k\alpha q} \left(\sum_{j=k}^{+\infty} |\lambda_j| \|a_j\|_{p(\cdot)} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq c \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2^{k\alpha q} \left(\sum_{j=k}^{+\infty} |\lambda_j| |\overline{B}(0, 2^k)|^{-\alpha/n} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq c \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2^{k\alpha q} \left(\sum_{j=k}^{+\infty} |\lambda_j| 2^{-\alpha j/n} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq c \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{j=k}^{-1} |\lambda_j| 2^{-(j-k)\alpha} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Et comme $0 < \alpha < \infty$, donc par le lemme de Hardy avec $0 < a = 2^{-\alpha} < 1$, nous avons

$$\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{j=k}^{-1} |\lambda_j| 2^{-(j-k)\alpha} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq c \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\lambda_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Conclusion

$$\|f\|_{\dot{K}_{p(\cdot)}^{\alpha, q}(\mathbb{R}^n)} \leq c \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\lambda_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

La preuve est déterminée. ■

Chapitre 3

Continuité des opérateurs intégraux du type Caldéron-Zygmund sur les espaces de Herz à exposant variable

Dans ce chapitre, on va étudier la continuité des opérateurs intégraux du type Caldéron-Zygmund sur les espaces de Herz à exposants variables

3.1 Résultats dans espaces de Herz classiques

Dans cette section, on donne la définition d'un opérateur intégraux du type Caldéron-Zygmund, puis on donne quelques résultats dans espaces de Herz classiques.

Définition 3.1.1 *Un opérateur est dit opérateur de Caldéron-Zygmund de noyau K s'il est borné dans L^2 et :*

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y)f(y)dy.$$

Soit T un opérateur de Calderón-Zygmund de noyau $K(x) \in \mathcal{C}^\infty$ loin de l'origine, satisfait

1- $|K(x)| \leq c|x|^{-n}$, si $x \neq 0$;

2- $\left| \frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta} (K(x-y) - K(x)) \right| \leq c_\beta \frac{|y|}{|x|^{n+|\beta|+1}}$ si $|x| \geq 2|y|$, où $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ est un multi-indice.

Définition 3.1.2 *Un opérateur T est dit sous-linéaire s'il satisfait la condition*

$$|Tf(x)| \lesssim \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(y)|}{|x-y|^n} dy, \quad x \notin \text{supp } f \quad (3.1.1)$$

pour toute fonction intégrable f de support compact.

Le théorème suivant présente la continuité d'un opérateur sous-linéaire T sur les espaces de Herz classiques.

Théorème 3.1.1 ([6]) *Soient $1 < p < \infty$, $0 < q < \infty$ et $0 < \alpha < n(1 - \frac{1}{p})$. Chaque opérateur sous-linéaire T est borné sur $L^p(\mathbb{R}^n)$, alors T est aussi borné sur $\dot{K}_p^{\alpha,q}(\mathbb{R}^n)$ et $K_p^{\alpha,q}(\mathbb{R}^n)$ respectivement.*

Remarque 3.1.1 *La condition (3.1.1) est satisfaite par plusieurs opérateurs classiques dans l'analyse Harmonique, comme l'opérateur de Calderón-Zygmund, l'opérateur maximal de Carleson et l'opérateur maximal de Hardy-Littlewood. Alors on conclut que les opérateurs de Calderón-Zygmund sont des opérateurs bornés sur les espaces de Herz.*

3.2 Continuité des opérateurs de type C-Z sur l'espaces de Herz à exposant variable

On présente dans cette section la continuité des opérateurs T satisfait la condition (3.1.1) (en particulier les opérateurs de type C-Z) sur les espaces de Herz non homogène à exposant variable.

Théorème 3.2.1 ([1]) *Soient $0 < q \leq \infty$, $p \in \mathcal{P}_\infty^{\log}$ telle que $1 < p^- \leq p^+ < \infty$, $0 < \alpha < \infty$ et*

$$-\frac{n}{p_\infty} < \alpha < n(1 - \frac{1}{p_\infty}) \quad (3.2.1)$$

Chaque opérateur sous-linéaire T satisfait la condition (3.1.1). Si T est un opérateur borné sur $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$, alors T est aussi borné sur $K_{p(\cdot)}^{\alpha,q}(\mathbb{R}^n)$.

Preuve. Nous divisons l'opérateur en

$$|Tf(x)| \leq |T(f\chi_{B_{-2}})(x)| + |T(f\chi_{B_{k-2} \setminus B_{-2}})(x)| + |T(f\chi_{\tilde{R}_k})(x)| + |T(f\chi_{\mathbb{R}^n \setminus B_{k+2}})(x)|$$

avec

$$\tilde{R}_k := \{x \in \mathbb{R}^n : 2^{k-2} \leq |x| < 2^{k+2}\}, k \in \mathbb{N}$$

• **Estimation de $\mathbb{T}(f\chi_{B_{-2}})$.**

Pour $x \in R_k$ et $y \in B_{-2}$, nous avons $|x - y| \geq |x| - |y| > 2^{k-2}$, alors

$$|\mathbb{T}(f\chi_{B_{-2}})(x)| \lesssim 2^{-kn} \int_{B_{-2}} |f(y)| dy,$$

Par l'inégalité de Hölder, la dernière estimation est majorée par

$$\begin{aligned} |\mathbb{T}(f\chi_{B_{-2}})(x)| &\lesssim 2^{-kn} \|f\chi_{B_{-2}}\|_{p(\cdot)} \|\chi_{B_{-2}}\|_{p'(\cdot)} \\ &\lesssim 2^{-kn} \|f\chi_{B_{-2}}\|_{p(\cdot)}, \quad x \in R_k \end{aligned}$$

avec une constante indépendante de k et x , en prenant la norme $L^{p(\cdot)}$, on obtient

$$2^{k\alpha} \|\chi_k \mathbb{T}(f\chi_{B_{-2}})\|_{p(\cdot)} \lesssim 2^{k(\alpha - n + \frac{n}{p_\infty})} \|f\chi_{B_{-2}}\|_{p(\cdot)},$$

où nous avons utilise

$$\|\chi_k \mathbb{T}(f\chi_{B_{-2}})\|_{p(\cdot)} \approx |R_k|^{\frac{1}{p_\infty}} \approx 2^{\frac{kn}{p_\infty}},$$

par le lemme 2.3.1 en prenant maintenant la quasi-norme ℓ^q et en observant que

$$\|f\chi_{B_{-2}}\|_{p(\cdot)} \leq \|f\chi_{B_0}\|_{p(\cdot)},$$

on obtient

$$\left(\sum_{k \geq 1} 2^{k\alpha q} \|\chi_k \mathbb{T}(f\chi_{B_{-2}})\|_{p(\cdot)}^q \right)^{\frac{1}{q}} \lesssim c_0 \|f\chi_{B_0}\|_{p(\cdot)} \leq c_0 \|f\|_{K_{p(\cdot)}^{\alpha, q}}$$

avec

$$c_0^q = \sum_{k \geq 1} 2^{kq(\alpha - n + \frac{n}{p_\infty})} < \infty,$$

en tenant compte de l'hypothèse (3.2.1).

• **Estimation de $\mathbb{T}(f\chi_{B_{k-2} \setminus B_{-2}})$.**

Soient $k \in \mathbb{N}$ et $x \in R_k$, alors

$$\begin{aligned} \left| \mathbb{T} \left(f \chi_{B_{k-2} \setminus B_{-2}} \right) \right| &\lesssim \int_{B_{k-2} \setminus B_{-2}} |x-y|^{-n} |f(y)| dy \\ &= \sum_{-1 \leq j \leq k-2} \int_{R_j} |x-y|^{-n} |f(y)| dy. \end{aligned}$$

Pour estimer la dernière intégrale nous notons que $|x-y| \geq |x|-|y| > \frac{2^k}{4}$, si $x \in R_k, y \in R_j$, d'où nous arrivons à l'inégalité

$$2^{k\alpha} \left| \mathbb{T} \left(f \chi_{B_{k-2} \setminus B_{-2}} \right) (x) \right| \lesssim \sum_{-1 \leq j \leq k-2} 2^{(k-j)\alpha - kn} 2^{j\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \chi_j(y) dy, \quad x \in R_k.$$

L'inégalité de Hölder implique que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \chi_j(y) dy \leq 2 \|f \chi_j\|_{p(\cdot)} \|\chi_j\|_{p'(\cdot)}.$$

Prendre la norme $L^{p(\cdot)}$ (par rapport à x) dans l'estimation précédente on a

$$2^{k\alpha} \left\| \chi_k \mathbb{T} \left(f \chi_{B_{k-2} \setminus B_{-2}} \right) \right\|_{p(\cdot)} \lesssim \sum_{-1 \leq j \leq k-2} 2^{(k-j)\alpha - kn} 2^{j\alpha} \|f \chi_j\|_{p(\cdot)} \|\chi_j\|_{p'(\cdot)} \|\chi_k\|_{p(\cdot)}.$$

Par le lemme 2.3.1

$$\|\chi_j\|_{p'(\cdot)} \approx |R_j|^{\frac{1}{p'_\infty}} \quad \text{et} \quad \|\chi_k\|_{p(\cdot)} \approx |R_j|^{\frac{1}{p_\infty}}.$$

Donc pour chaque $k \in \mathbb{N}$, on a

$$2^{k\alpha} \left\| \chi_k \mathbb{T} \left(f \chi_{B_{k-2} \setminus B_{-2}} \right) \right\|_{p(\cdot)} \lesssim \sum_{-1 \leq j \leq k-2} 2^{(k-j)\delta} 2^{j\alpha} \|f \chi_j\|_{p(\cdot)}.$$

Notons que $\delta = \alpha - n + \frac{n}{p_\infty}$, et en prenant maintenant le quasi-norme ℓ^q , on obtient

$$\begin{aligned} &\left\{ \sum_{k \geq 1} 2^{k\alpha q} \left\| \chi_k \mathbb{T} \left(f \chi_{B_{k-2} \setminus B_{-2}} \right) \right\|_{p(\cdot)}^q \right\}^{\frac{1}{q}} \\ &\lesssim \left\{ \sum_{k \geq 1} \left(\sum_{-1 \leq j \leq k-2} 2^{(k-j)\delta} 2^{j\alpha} \|f \chi_j\|_{p(\cdot)} \right)^q \right\}^{\frac{1}{q}} \\ &\lesssim \sum_{k \geq 1} \left(2^{(k+1)\delta} 2^{-\alpha} \|f \chi_{-1}\|_{p(\cdot)} + 2^{k\delta} \|f \chi_0\|_{p(\cdot)} + \sum_{-1 \leq j \leq k-2} 2^{(k-j)\delta} 2^{j\alpha} \|f \chi_j\|_{p(\cdot)} \right)^q. \end{aligned}$$

Puisque α est borné et $\chi_{-1}, \chi_0 \leq \chi_{B_0}$, la côté droite de la dernière inégalité est bornée par

$$c_0 \|f \chi_{B_0}\|_{p(\cdot)} + \left\{ \sum_{k \geq 1} \left(\sum_{1 \leq j \leq k} 2^{(k-j)\delta} 2^{j\alpha} \|f \chi_j\|_{p(\cdot)} \right)^q \right\}^{\frac{1}{q}}.$$

avec $c_0^q = \sum_{k \geq 1} 2^{k\delta q} < \infty$, par hypothèse (3.2.1), le lemme de Hardy est donne

$$\begin{aligned} \left\{ \sum_{k \geq 1} 2^{k\alpha q} \left\| \chi_k \mathbb{T} \left(f \chi_{B_{K-2} \setminus B_{-2}} \right) \right\|_{p(\cdot)}^q \right\}^{\frac{1}{q}} &\lesssim \|f \chi_{B_0}\|_{p(\cdot)} + \left\{ \sum_{j \geq 1} 2^{j\alpha q} \|f \chi_j\|_{p(\cdot)}^q \right\}^{\frac{1}{q}} \\ &= \|f\|_{K_{p(\cdot)}^{\alpha, q}}. \end{aligned}$$

• **Estimation de $\mathbb{T}(f \chi_{\tilde{R}_k})$.**

Puisque \mathbb{T} est borné sur $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ et $\chi_{\tilde{R}_k} = \sum_{j=-1}^2 \chi_{k+j}$

$$\|\mathbb{T}(f \chi_{\tilde{R}_k}) \chi_k\|_{p(\cdot)} \lesssim \|\mathbb{T}(f \chi_{\tilde{R}_k}) \chi_k\|_{p(\cdot)} \lesssim \|f \chi_{\tilde{R}_k}\|_{p(\cdot)} \lesssim \sum_{j=-1}^2 \|f \chi_{k+j}\|_{p(\cdot)},$$

en prenant la quasi-norme, on obtient

$$\begin{aligned} &\left\{ \sum_{k \geq 1} 2^{k\alpha q} \left\| \mathbb{T}(f \chi_{\tilde{R}_k}) \chi_k \right\|_{p(\cdot)}^q \right\}^{\frac{1}{q}} \\ &\lesssim \left\{ \sum_{k \geq 1} \sum_{-1 \leq j \leq 2} 2^{(k+j)\alpha q} \|f \chi_{k+j}\|_{p(\cdot)}^q \right\}^{\frac{1}{q}} \\ &\lesssim \left\{ \|f \chi_0\|_{p(\cdot)}^q + \sum_{k \geq 2} 2^{(k-1)\alpha q} \|f \chi_{k-1}\|_{p(\cdot)}^q + \sum_{0 \leq j \leq 2} \sum_{i \geq 1} 2^{i\alpha q} \|f \chi_i\|_{p(\cdot)}^q \right\}^{\frac{1}{q}} \\ &\lesssim \|f \chi_{B_0}\|_{p(\cdot)} + \left\{ \sum_{i \geq 1} 2^{i\alpha q} \|f \chi_i\|_{p(\cdot)}^q \right\}^{\frac{1}{q}} \\ &= \|f\|_{K_{p(\cdot)}^{\alpha, q}}. \end{aligned}$$

• **Estimation de $\mathbb{T}(f \chi_{\mathbb{R}^n \setminus B_{k+2}})$.**

Soient $k \in \mathbb{N}$ et $x \in R_k$

$$\left| \mathbb{T}(f \chi_{\mathbb{R}^n \setminus B_{k+2}})(x) \right| \lesssim \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_{k+2}} |x - y|^{-n} |f(y)| dy = \sum_{j \geq k+3} \int_{R_j} |x - y|^{-n} |f(y)| dy.$$

Notons que $|x - y| > 2^{j-3}$ pour $x \in R_k$ et $y \in R_j$, nous appliquons l'inégalité de Hölder et le lemme 2.3.1 pour obtenir l'estimation

$$2^{k\alpha} \left\| \chi_k \mathbb{T}(f \chi_{\mathbb{R}^n \setminus B_{K+2}}) \right\|_{p(\cdot)} \lesssim \sum_{j \geq k+3} 2^{(k-j)(\alpha + \frac{n}{p_\infty})} 2^{j\alpha} \|f \chi_j\|_{p(\cdot)}$$

Comme $\alpha + \frac{n}{p_\infty} > 0$ par (3.2.1), nous appliquons le lemme de Hardy, on obtient

$$\begin{aligned} \left\{ \sum_{k \geq 1} 2^{k\alpha q} \left\| \chi_k \mathbb{T} \left(f \chi_{\mathbb{R}^n \setminus B_{k+2}} \right) \right\|_{p(\cdot)}^q \right\}^{\frac{1}{q}} &\lesssim \left\{ \sum_{k \geq 1} \left(\sum_{j \geq 1} 2^{(k-j)(\alpha + \frac{n}{p_\infty})} 2^{j\alpha} \|f \chi_j\|_{p(\cdot)} \right)^q \right\}^{\frac{1}{q}} \\ &\lesssim \left\{ \sum_{j \geq 1} 2^{j\alpha q} \|f \chi_j\|_{p(\cdot)}^q \right\}^{\frac{1}{q}} \\ &\lesssim \|f\|_{K_{p(\cdot)}^{\alpha, q}}. \end{aligned}$$

Rappelent la définition de $\|f\|_{K_{p(\cdot)}^{\alpha, q}}$, il reste montrer que $\|(\mathbb{T}f) \chi_{B_0}\|_{p(\cdot)} \lesssim \|f\|_{K_{p(\cdot)}^{\alpha, q}}$, pour compléter la preuve

$$|\mathbb{T}f(x)| \leq |\mathbb{T}(f \chi_{B_0})(x)| + |\mathbb{T}(f \chi_1)(x)| + |\mathbb{T}(f \chi_{\mathbb{R}^n \setminus B_1})(x)|.$$

Par l'hypothèse \mathbb{T} est borné sur $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$, on sépare les trois termes telles que

$$\begin{aligned} \|\mathbb{T}(f \chi_0) \chi_{B_0}\|_{p(\cdot)} &\lesssim \|\mathbb{T}(f \chi_{B_0})\|_{p(\cdot)} \lesssim \|f \chi_{B_0}\|_{p(\cdot)} \lesssim \|f\|_{K_{p(\cdot), q}^\alpha} \\ \|\mathbb{T}(f \chi_1) \chi_{B_0}\|_{p(\cdot)} &\lesssim \|\mathbb{T}(f \chi_1)\|_{p(\cdot)} \lesssim 2^\alpha \|f \chi_1\|_{p(\cdot)} \lesssim \|f\|_{K_{p(\cdot), q}^\alpha}, \end{aligned}$$

pour le terme reste nous notons que $|x - y| \geq 2^{k-2}$, $x \in B_0$, $y \in R_j$

$$|\mathbb{T}(f \chi_{\mathbb{R}^n \setminus B_1})(x)| \lesssim \sum_{k \geq 2} 2^{-kn} \int_{R_k} |f(y)| dy,$$

appliquant l'inégalité de Hölder et le lemme 2.3.1, on trouve

$$\begin{aligned} |\mathbb{T}(f \chi_{\mathbb{R}^n \setminus B_1})(x)| &\lesssim \sum_{k \geq 2} 2^{-k(\alpha + \frac{n}{p_\infty})} 2^{k\alpha} \|f \chi_k\|_{p(\cdot)} \\ &\lesssim c_1 \sup_{j \in \mathbb{N}} 2^{j\alpha} \|f \chi_j\|_{p(\cdot)}, \end{aligned}$$

telle que

$$c_1 = \sum_{k \geq 2} 2^{-k(\alpha + \frac{n}{p_\infty})} < \infty,$$

comme $\alpha + \frac{n}{p_\infty} > 0$, alors

$$\begin{aligned} \|\mathbb{T}(f \chi_{\mathbb{R}^n \setminus B_1}) \chi_{B_0}\| &\lesssim 2^{j\alpha} \|f \chi_j\|_{p(\cdot)} \|\chi_{B_0}\|_{p(\cdot)} \\ &\lesssim \|f\|_{K_{p(\cdot)}^{\alpha, q}}. \end{aligned}$$

Ce qui termine la preuve. ■

Théorème 3.2.2 ([1]) Soient $0 < q < \infty$ et $p \in \mathcal{P}_0^{\log}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{P}_\infty^{\log}(\mathbb{R}^n)$, avec $1 < p^- \leq p^+ < \infty$, et $0 < \alpha < \infty$ telle que

$$-\frac{n}{p^+} < \alpha < n \left(1 - \frac{1}{p^-}\right),$$

alors chaque opérateur sous-linéaire T satisfait la condition (3.1.1), T est un opérateur borné sur $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$, alors T aussi borné sur $\dot{K}_{p(\cdot)}^{\alpha,q}(\mathbb{R}^n)$.

Remarque 3.2.1 La continuité des opérateurs de Calderón-Zygmund sur les espaces de Herz à exposant variable est une conséquence immédiate des deux Théorèmes précédents.

3.3 La continuité des opérateurs intégraux fractionnaires sur les espaces de Herz à exposant variable

Dans cette section, on va étudier la continuité opérateurs intégraux fractionnaires sur les espaces de Herz à exposant variable.

Soit σ tel que $0 < \sigma < n$, pour une fonction f , on définit l'opérateur intégrale fractionnaire I_σ par

$$I_\sigma(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\sigma}} dy.$$

Il ya des chercheurs traitent ce point par exemple A. Almeida [1] et H. Wang, Z. Liu et Z. Fu [8].

Le lemme suivant est le lemme 0.6 de [8] presente la bornitude de I_σ sur les espaces de Lebesgue à exposant variable.

Lemme 3.3.1 Soient $p_1, p_2 \in \mathcal{P}^{\log}(\mathbb{R}^n)$ tel que $p_1^+ < \frac{n}{\sigma}$ et $\frac{1}{p_1(\cdot)} - \frac{1}{p_2(\cdot)} = \frac{n}{\sigma}$, alors pour toute fonction $f \in L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ il existe une constante c positive telle que on a

$$\|I_\sigma(f)\|_{p_2(\cdot)} \leq c \|f\|_{p_1(\cdot)}.$$

Théorème 3.3.1 ([6]) Soient $p_1, p_2 \in \mathcal{P}^{\log}(\mathbb{R}^n)$ tel que $p_1^+ < \frac{n}{\sigma}$, $0 < \sigma < n(\frac{1}{p_1^-} + \frac{1}{p_1^+})$ et $\frac{1}{p_1(\cdot)} - \frac{1}{p_2(\cdot)} = \frac{n}{\sigma}$. $0 < q_1 \leq q_2 < \infty$ et $-n/p_1^+ < \alpha < n + n/p_1^- - \sigma$. Alors I_σ est borné de $\dot{K}_{p_1(\cdot)}^{\alpha,q_1}(\mathbb{R}^n)$ dans $\dot{K}_{p_2(\cdot)}^{\alpha,q_2}(\mathbb{R}^n)$.

Preuve. Soit $f \in \dot{K}_{p_1(\cdot)}^{\alpha, q_1}(\mathbb{R}^n)$. On écrit

$$f(x) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} f_i,$$

où

$$f_i = f\chi_i.$$

On a

$$\begin{aligned} \|I_\sigma(f)\|_{\dot{K}_{p_2(\cdot)}^{\alpha, q_2}(\mathbb{R}^n)}^{q_1} &= c \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2^{k\alpha q_1} \|I_\sigma(f)\chi_k\|_{p_2(\cdot)}^{q_1} \\ &\leq c \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2^{k\alpha q_1} \left(\sum_{i=-\infty}^{k-2} \|I_\sigma(f_i)\chi_k\|_{p_2(\cdot)} \right)^{q_1} \\ &\quad + c \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2^{k\alpha q_1} \left(\sum_{i=k-1}^{k+1} \|I_\sigma(f_i)\chi_k\|_{p_2(\cdot)} \right)^{q_1} \\ &\quad + c \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2^{k\alpha q_1} \left(\sum_{i=k+2}^{+\infty} \|I_\sigma(f_i)\chi_k\|_{p_2(\cdot)} \right)^{q_1} \\ &= c(I_1 + I_2 + I_3). \end{aligned}$$

Estimation de I_1 . Par la définition de I_σ et l'inégalité de Hölder, on trouve

$$\begin{aligned} |I_\sigma(f_i)(x)| \chi_k(x) &\leq \chi_k(x) \int_{B_i} |x-y|^{-n+\sigma} |f_i(y)| dy \\ &\leq c 2^{-k(n-\sigma)} \chi_k(x) \int_{B_i} |f_i(y)| dy \\ &\leq c 2^{-k(n-\sigma)} \|f_i\|_{p_1(\cdot)} \|\chi_{B_i}\|_{p'_1(\cdot)} \chi_k(x). \end{aligned} \tag{3.3.1}$$

D'autre part, on a

$$I_\sigma(\chi_{B_k})(x) \geq \int_{B_k} \frac{dy}{|x-y|^{n-\sigma}} \chi_{B_k}(x) \geq c 2^{k\sigma} \chi_{B_k}(x). \tag{3.3.2}$$

Par (3.3.1), (3.3.2) et le lemme 3.3.1, on trouve

$$\begin{aligned} \|I_\sigma(f_i)\chi_k\|_{p_2(\cdot)} &\leq c 2^{-k(n-\sigma)} \|f_i\|_{p_1(\cdot)} \|\chi_{B_i}\|_{p'_1(\cdot)} \|\chi_k\|_{p_2(\cdot)} \\ &\leq c 2^{-k(n-\sigma)} 2^{-i\sigma} \|f_i\|_{p_1(\cdot)} \|\chi_{B_i}\|_{p'_1(\cdot)} \|I_\sigma(\chi_{B_k})\|_{p_2(\cdot)} \\ &\leq c 2^{-k(n-\sigma)} 2^{-i\sigma} \|f_i\|_{p_1(\cdot)} \|\chi_{B_i}\|_{p'_1(\cdot)} \|\chi_{B_k}\|_{p_1(\cdot)} \end{aligned} \tag{3.3.3}$$

Comme $i \leq k$, on a

$$c2^{(k-i)/p^+} \leq \frac{\|\chi_k\|_{p_1(\cdot)}}{\|\chi_i\|_{p_1(\cdot)}} \leq C2^{(k-i)/p^-},$$

alors on peut majoré (3.3.3) par

$$c2^{(i-k)(n-\sigma-1/p^-)} \|f_i\|_{p_1(\cdot)}.$$

Ce qui donne

$$I_1 \leq c \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{i=-\infty}^{k-2} \left(2^{i\alpha q_1} \|f_i\|_{p_1(\cdot)}^{q_1} 2^{(i-k)(n-\sigma-\alpha-n/p_1^-)q_1} \right),$$

et comme $\sigma - n + \alpha + n/p_1^- > 0$, alors par l'inégalité de Hardy, on a

$$I_1 \leq c \sum_{k=-\infty}^{\infty} \|f_i\|_{p_1(\cdot)}^{q_1} \leq c \|f\|_{\dot{K}_{p_1(\cdot)}^{\alpha, q_1}}^{q_1}.$$

Estimation de I_2 . Par la bornitude de I , on a

$$\begin{aligned} I_2 &= c \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2^{k\alpha q_1} \left(\sum_{i=k-1}^{k+1} \|I_\sigma(f_i)\chi_k\|_{p_2(\cdot)} \right)^{q_1} \\ &\leq c \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{i=k-1}^{k+1} 2^{(k-i)\alpha q_1} 2^{i\alpha q_1} \left(\|f_i\|_{p_1(\cdot)} \right)^{q_1} \\ &\leq c \|f\|_{\dot{K}_{p_1(\cdot)}^{\alpha, q_1}}^{q_1}. \end{aligned}$$

Estimation de I_3 . Par (3.3.3), on trouve

$$\begin{aligned} I_3 &= c \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2^{k\alpha q_1} \left(\sum_{i=k+2}^{+\infty} \|I_\sigma(f_i)\chi_k\|_{p_2(\cdot)} \right)^{q_1} \\ &\leq c \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2^{k\alpha q_1} \left(\sum_{i=k+2}^{+\infty} c2^{-kn} \|f_i\|_{p_1(\cdot)} \|\chi_{B_i}\|_{p'_1(\cdot)} \|\chi_{B_k}\|_{p_1(\cdot)} \right)^{q_1} \end{aligned}$$

Comme $k \leq i$, on a

$$c2^{-(i-k)/p^-} \leq \frac{\|\chi_k\|_{p_1(\cdot)}}{\|\chi_i\|_{p_1(\cdot)}} \leq C2^{-(i-k)/p^+},$$

$$\begin{aligned} I_3 &\leq c \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2^{k\alpha q_1} \left(\sum_{i=k+2}^{+\infty} c2^{(k-i)/p^+} \|f_i\|_{p_1(\cdot)} \right)^{q_1} \\ &\leq c \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{i=k+2}^{+\infty} c2^{(k-i)(\alpha+1/p^+)} \left(2^{i\alpha} \|f_i\|_{p_1(\cdot)} \right) \right)^{q_1}. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Hardy, on trouve

$$\begin{aligned} I_3 &\leq c \sum_{i=-\infty}^{+\infty} 2^{i\alpha q_1} \|f_i\|_{p_1(\cdot)}^{q_1} . \\ &\leq c \|f\|_{\dot{K}_{p_1(\cdot)}^{\alpha, q_1}}^{q_1} \end{aligned}$$

Conclusion

$$\|f\|_{\dot{K}_{p_2(\cdot)}^{\alpha, q_2}} \leq c \|f\|_{\dot{K}_{p_1(\cdot)}^{\alpha, q_1}} .$$

Ce qui termine la preuve. ■

Remarque 3.3.1 *On peut utiliser la décomposition atomique pour montrer le théorème précédant.*

Conclusion

Les opérateurs de Caldéron-Zygmund de noyau K définis par:

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y)f(y)dy.$$

sont des opérateurs bornés sur les espaces de Herz classiques et aussi borné sur les espaces de Herz à exposant variable. (En fait, la plupart des résultats dans les espaces fonctionnels classiques ont été généralisés aux espaces fonctionnels à exposants variables). Cette classe d'opérateurs attirés plusieurs auteurs dans les trois dernières décennies.

Bibliographie

- [1] A. Almeida and D. Drihem.: Maximal, potential and singular type operators on Herz spaces with variable exponents, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 394, no. 2, pp.781–795, 2012.
- [2] D. Cruz-Uribe and A. Fiorenza, *Variable Lebesgue spaces*. Birkhäuser, Berlin, 2013.
- [3] D. Cruz-Uribe, A. Fiorenza, M. Ruzhansky and J. Wirth, *Variable Lebesgue space and hyperbolic systems*, edited by Sergey Tikhonov. *Advanced Courses in Mathematics CRM Barcelona*, vol. **20**, Birkhäuser, Basel, 2013. ISBN 978-3-0348-0839-2.
- [4] L. Diening, P. Harjulehto, P. Hästö and M. Růžička, *Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents*, *Lecture Notes in Mathematics*, **2017**, Springer Verlag, Berlin, 2011.
- [5] R. Heraiz, Some properties of variable Herz type-Besov spaces and application, thèse de doctorat, univ. de Msila, algerie.2017
- [6] S. Lu and D. Yang, The decomposition of weighted Herz space on \mathbb{R}^n and its applications, *Sci. China (Ser. A)*. 38 (1995), 147-158.
- [7] S. Lu, D. Yang and G. Hu, *Herz Type Spaces and Their Applications*, Beijing: Science Press, 2008.
- [8] H. Wang, L. Zongguang and F. Zunwei.: Boundedness of Fractional Integrals on Herz-type Hardy Spaces with variable exponent, *Advances in Mathematics(China)* 2017 Vol.46 (2): 252-260.

- [9] J. Xu and D. Yang, Herz-type Triebel-Lizorkin spaces I, Acta Math. Sci (English) (Ed.) 21 (2005), 643-654.